2016
MATHEMATICS
[GENERAL]
Paper : I

Full Marks : 100 Time : 3 Hours

The figures in the right-hand margin indicate marks.

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

Notations and symbols have their usual meanings.

1. Answer any **ten** questions: $2\times10=20$

যে-কোনো **দশটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

a) Find the smallest positive integer *n*, such that $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1$, where $i=\sqrt{-1}$.

সর্বনিম্ন ধনাত্মক অখন্ড রাশি n-এর মান নির্ণয় কর যখন $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1$, (প্রদত্ত $i=\sqrt{-1}$)

b) Show that the roots of the equation $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$ are conjugate complex numbers.

দেখাও যে, $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$ সমীকরণের বীজদ্বয় অনুবন্ধী জটিল রাশি।

c) Solve the equation $4x^3+16x^2-9x-36=0$ when the sum of two roots is zero.

সমাধান কর ঃ $4x^3+16x^2-9x-36=0$, যখন উহার দুটি বীজের যোগফল শূন্য হয়।

d) Find a relation between p and q in order that the polynomial $x^4+px^3-13x^2+qx+24$ may be exactly divisible by $(x+2)$.

$x^4+px^3-13x^2+qx+24$ রাশিমালাটি $(x+2)$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হলে p ও q-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

e) Transform into polar equation:

$x^2+y^2=16$

$x^2+y^2=16$ সমীকরণটিকে পোলার সমীকরণে পরিবর্তিত করো।

f) Transform the equation $x^2-y^2=a^2$ if the axes are rotated through an angle 45°.

অক্ষদ্বয়ের 45° ঘূর্ণনের ফলে $x^2-y^2=a^2$ সমীকরণটির পরিবর্তিত রূপ লেখ।

g) Show that the three points whose position vectors are $i+2j+3k$, $-i-j+8k$ and $-4i+4j+6k$ form an equilateral triangle.

তিনটি বিন্দুর পজিশন ভেক্টর $i+2j+3k$, $-i-j+8k$ এবং $-4i+4j+6k$। দেখাও যে, ঐ তিনটি বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

h) Determine an unit vector perpendicular to both the vectors $4i+3j-k$ and $2i-6j-3k$.

এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর, যা $4i+3j-k$ এবং $2i-6j-3k$ উভয় ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব।

i) Test whether $f(x)=|x-1|$ is differentiable at $x=1$.

$f(x)=|x-1|$ অপেক্ষকটি $x=1$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য কিনা পরীক্ষা কর।

j) Evaluate: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

k) Prove that $\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$.

প্রমাণ কর যে, $\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$

l) Find the domain of definition:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}.$$

সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় কর ঃ

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}\text{।}$$

m) Solve: $y\,dx+(1+x^2)\tan^{-1}x\,dy=0$.

সমাধান কর ঃ $y\,dx+(1+x^2)\tan^{-1}x\,dy=0$

n) Show that the function $\frac{x^2}{x^2+16}$ is a decreasing function at $x=-2$.

প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{x^2+16}$ অপেক্ষকটি $x=-2$ বিন্দুতে ক্রমহ্রাসমান।

o) Find the integrating factor of the differential equation $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$.

$x\frac{dy}{dx}+y=x^3$ অবকল সমীকরণের Integrating factor নির্ণয় কর।

p) Show that $\int_{-1}^{1}(x+|x|)\,dx=1$.

প্রমাণ কর যে, $\int_{-1}^{1}(x+|x|)\,dx=1$

MODULE–I

GROUP–A

2. Answer any **two** questions: $8 \times 2 = 16$

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

a) i) For any two complex numbers z_1 and z_2, prove that

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

z_1 ও z_2 যে-কোনো দুটি জটিল রাশি। প্রমাণ কর যে, $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

ii) If $u + iv = \tan(x + iy)$, then prove that $u^2 + v^2 + 2u \cot 2x = 1$. 4+4

যদি $u + iv = \tan(x + iy)$ হয়, প্রমাণ কর যে, $u^2 + v^2 + 2u \cot 2x = 1$

b) i) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ find the value of $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজ তিনটি α, β, γ হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$-এর মান নির্ণয় কর।

ii) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 - 3x^2 + 8x - 5 = 0$, then form an equation whose roots are $2\alpha + 3$, $2\beta + 3$, $2\gamma + 3$.

$x^3 - 3x^2 + 8x - 5 = 0$ সমীকরণের বীজতিনটি α, β, γ হলে, এমন একটি সমীকরণ গঠন করো যার বীজতিনটি হয় $2\alpha + 3$, $2\beta + 3$, $2\gamma + 3$

iii) State the Fundamental Theorem of Algebra. 3+3+2

বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্যটি লেখ।

c) i) Solve the equation by Cardan's method:

$$x^3 - 12x + 65 = 0 \cdot$$

কার্ডন পদ্ধতিতে $x^3 - 12x + 65 = 0$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় কর।

ii) If $x + \frac{1}{x} = 2\cos\frac{\pi}{7}$, show that

$$x^7 + \frac{1}{x^7} = -2. \qquad 5+3$$

যদি $x + \frac{1}{x} = 2\cos\frac{\pi}{7}$ হয় তাহলে দেখাও যে

$$x^7 + \frac{1}{x^7} = -2$$

GROUP–B

3. Answer any **two** questions: $8\times2=16$

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

a) i) Show that the equation

$$x^2+6xy+9y^2+4x+12y-5=0$$

represents a pair of parallel straight lines and also find the distance between them.

দেখাও যে, $x^2+6xy+9y^2+4x+12y-5=0$ সমীকরণটি একটি জোড় সমান্তরাল সরলরেখা সূচিত করে এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

ii) Show that the product of the perpendicular distances from the point (p, q) to the lines represented by $ax^2+2hxy+by^2=0$ is $\frac{ap^2+2hpq+bq^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$.

(2+2)+4

দেখাও যে, $ax^2+2hxy+by^2=0$ সমীকরণটি যে দুটি সরলরেখা সূচিত করে, (p, q) বিন্দু থেকে তাদের উপর লম্বদূরত্বের গুণফল হবে

$$\frac{ap^2+2hpq+bq^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}.$$

b) i) Find the nature of the conic

$$x^2+4xy+4y^2+4x+y-15=0$$

and reduce it to its canonical form.

$x^2+4xy+4y^2+4x+y-15=0$ বক্রটির প্রকৃতি (nature) নির্ণয় কর এবং উহাকে canonical আকারে (form) পরিবর্তিত কর।

ii) Show that the distance between two fixed points is unaltered under rotation of axes. (1+4)+3

দেখাও যে, অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণনের (Rotation) ফলে দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে।

c) i) If r_1 and r_2 be two mutually perpendicular radius vectors of the ellipse $r^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta}$, then show that $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

$r^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta}$ উপবৃত্তের r_1 এবং r_2 দুটি পরস্পর লম্ব রেডিয়াস ভেক্টর (Radius vector) হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

ii) Show that the straight line $\frac{l}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, if $(a-e)^2 + b^2 = 1$.

4+4

$\frac{l}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta$ সরলরেখা $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ কণিকাটিকে স্পর্শ করবে, যদি $(a-e)^2 + b^2 = 1$ হয়, প্রমাণ কর।

GROUP–C

4. Answer any **one** question: $8\times1=8$

যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

a) i) Show that the vectors $(6i+3j+2k)$, $(2i-6j+3k)$ and $(-3i+2j+6k)$ are mutually perpendicular.

দেখাও যে, $(6i+3j+2k)$, $(2i-6j+3k)$ এবং $(-3i+2j+6k)$ ভেক্টরগুলি পরস্পর লম্ব।

ii) Prove by vector method that the line segment joining the mid-points of two sides of a triangle is parallel to the third side and is equal in length to half that of the third side. 3+5

ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হবে।

b) i) A particle acted on by constant forces $5i+2j+k$ and $2i-j-3k$ is displaced from origin to the point $4i+j-2k$. Show that the total work done by the forces is 35 units of work.

দুটি ধ্রুবক বল $5i+2j+k$ এবং $2i-j-3k$ একটি বস্তুকণার উপর কার্যকরী হলে, বস্তুকণাটি মূলবিন্দু থেকে $4i+j-2k$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হল। দেখাও যে, মোট কার্যকরী বলের পরিমাণ 35 একক।

ii) For the three vectors $\vec{a} = 3i-j+2k$, $\vec{b} = 2i+j-k$ and $\vec{c} = i-2j+2k$, calculate $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

$\vec{a} = 3i-j+2k$, $\vec{b} = 2i+j-k$ এবং $\vec{c} = i-2j+2k$ তিনটি ভেক্টর, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$-এর মান নির্ণয় কর।

iii) If $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $\vec{0}$ is the null vector, prove that $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

3+3+2

যদি $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $\vec{0}$ শূন্য ভেক্টর। প্রমাণ কর যে, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$।

MODULE–II

GROUP–A

5. Answer any **two** questions: $8\times2=16$

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

a) i) Prove that any function can be expressed as sum of an even function and an odd function.

প্রমাণ কর যে, যে-কোনো একটি অপেক্ষককে একটি যুগ্ম ও একটি অযুগ্ম অপেক্ষকের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

ii) State D'Alembert's Ratio Test for convergence and divergence of an infinite series with positive terms and hence show that the infinite series

$$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^{n-1}}+\ldots$$

is convergent. 3+(3+2)

একটি ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণীর অভিসারী (convergent) ও অপসারী (divergent) হওয়ার D'Alembert's Ratio Test-টি উল্লেখ কর। অতঃপর দেখাও যে,

$$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^{n-1}}+\ldots$$

অসীম শ্রেণীটি অভিসারী।

b) i) When a sequence $\{x_n\}$ is said to be bounded? If $x_n=\frac{3n-1}{n+2}$, prove that the sequence $\{x_n\}$ is monotone increasing.

কখন একটি অনুক্রম $\{x_n\}$-কে সীমাবদ্ধ (bounded) বলা হয়? যদি $x_n=\frac{3n-1}{n+2}$ হয়, প্রমাণ কর যে, অনুক্রম $\{x_n\}$ বর্ধিষ্ণু (increasing) হয়।

ii) If $y=e^{m\cos^{-1}x}$ then prove that

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-\left(m^2+n^2\right)y_n=0.$$

(2+2)+4

যদি $y=e^{m\cos^{-1}x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-\left(m^2+n^2\right)y_n=0$$

c) i) If $u=x^y$, then show that

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial y\,\partial x}.$$

যদি $u=x^y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial y\,\partial x}$$

ii) If $v=\log_e\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)$, apply Euler's theorem to prove that $x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=1$. 3+5

যদি $v=\log_e\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)$ হয়, Euler-এর উপপাদ্য প্রয়োগ করে প্রমাণ কর যে,

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=1$$

GROUP–B

6. Answer any **one** question: $8\times1=8$

যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

a) i) Evaluate any **one**: 4×1

যে-কোনো **একটির** মান নির্ণয় কর ঃ

I) $\int e^x.\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\,dx$

II) $\int \cos\left(2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)dx$.

ii) From definition of definite Integral, evaluate $\int_0^1 e^x\,dx$. 4

নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে মান নির্ণয় কর ঃ

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

b) i) State and prove Fundamental theorem of Integral Calculus.

সমাকলনের মৌলিক উপপাদ্যটি বিবৃত কর ও প্রমাণ কর।

ii) If $I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n\theta\,d\theta$, show that $I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$. Hence find the value of $\int_0^{\pi/4}\tan^6\theta\,d\theta$. (1+3)+(3+1)

$I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n\theta\,d\theta$ হলে দেখাও যে,

$$I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$$

উপরিলিখিত সম্পর্কটির সাহায্যে

$\int_0^{\pi/4}\tan^6\theta\,d\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

GROUP–C

7. Answer any **two** questions: 8×2=16

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

a) i) Find the differential equation of all circles passing through the origin and having centre on the x-axis.

যে সকল বৃত্ত মূলবিন্দুগামী এবং কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত তাদের অবকল সমীকরণ নির্ণয় কর।

ii) Find the differential equation by eliminating the parameters a and b from the relation.

a এবং b প্যারামিটার দুটি অপনয়ন করে নিম্নলিখিত সম্পর্ক থেকে অবকল সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$xy = ae^{x} + be^{-x} + x^2.$$ 4+4

b) Answer any **two** questions: 4×2

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

i) Solve:

সমাধান কর ঃ

$$\left(x^3 + y^3\right)\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

ii) Solve:

সমাধান কর. ঃ

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$$

iii) Show that the equation of the curve whose slope at any point is equal to $y+2x$ and which passes through the origin is $y = 2\left(e^x - x - 1\right)$.

দেখাও যে, মূলবিন্দুগামী যে বক্রের নতি $y+2x$, তার সমীকরণ হয় $y = 2\left(e^x - x - 1\right)$

c) Solve:

সমাধান কর ঃ

i) $y = p^2 x + p$ where $p = \frac{dy}{dx}$

$y = p^2 x + p$ যখন $p = \frac{dy}{dx}$

ii) $\left(D^4 + 2D^2 + 1\right)y = x^2 \cos x$ where $D \equiv \frac{d}{dx}$

$\left(D^4 + 2D^2 + 1\right)y = x^2 \cos x$ যখন $D \equiv \frac{d}{dx}$